

说明:

导数的应用之洛必达法则 (15 分钟)

题目来源: 《高等应用数学》第3章第1节

内容大致要求: 先讲解洛必达法则, 之后引入 1-2 个逐渐增加难度的例题, 最后通过例题总结洛必达法则的求解步骤。

二、洛必达法则

如果当 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大, 那么极

限 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在、也可能不存在. 例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 存在且等于 1, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3}$ 不存在, 通常把

这种极限叫做未定式, 分别称之为 $\frac{0}{0}$ 型未定式或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 对于这类极限, 即使它存在也不能用“商的极限等于极限的商”这一法则. 下面给出求未定式极限的简便而有效的方法——洛必达法则.

1. “ $\frac{0}{0}$ ”型未定式

定理 2 (洛必达法则 1) 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

(2) 在点 a 的某去心邻域内 (点 a 可以除外) 可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在 (或为无穷大);}$$

则
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍属 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 且这时 $f'(x), g'(x)$ 能满足定理中 $f(x), g(x)$ 所要满

足的条件, 那么可以继续用洛必达法则, 即 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$, 依此类推.

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由洛必达法则, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

解
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}.$$

注意: 上式中 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2}$ 已不是未定式, 不能对它应用洛必达法则, 否则导致错误结果,

以后使用洛必达法则时应当经常注意这一点, 如果不是未定式, 就不能应用洛必达法则.

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}$.

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3x(1+x^2)} = \infty.$$

2. “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式

定理 3 (洛必达法则 2) 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件:

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;

(2) 在点 a 的某去心邻域内 (点 a 可以除外) 可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大);

则
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right)}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x \cos x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = -1. \end{aligned}$$

注: 定理 2、定理 3 中 $x \rightarrow a$ 改为 $x \rightarrow \infty$ 时, 洛必达法则同样有效.

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0) \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n} = 0$.

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} (n \in N^+, \lambda > 0) \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

解 应用洛必达法则 n 次, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}} = 0.$$